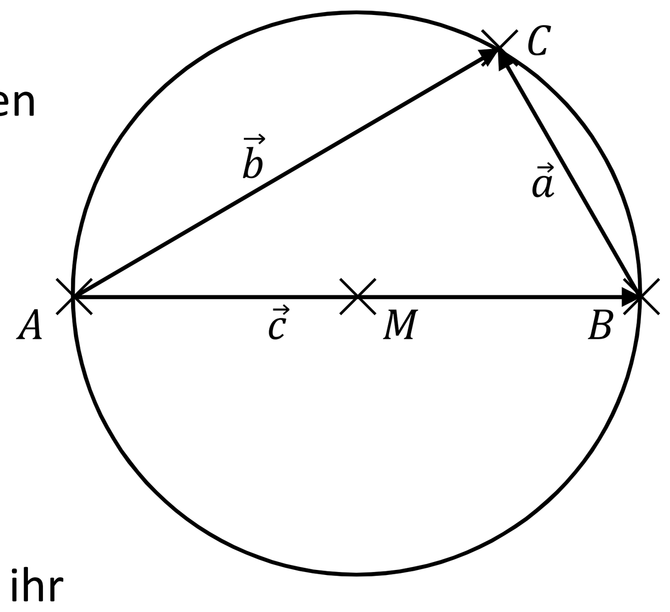
Doppelstunde zum Beweis vom Satz des Thales

Der Unterrichtsmodus

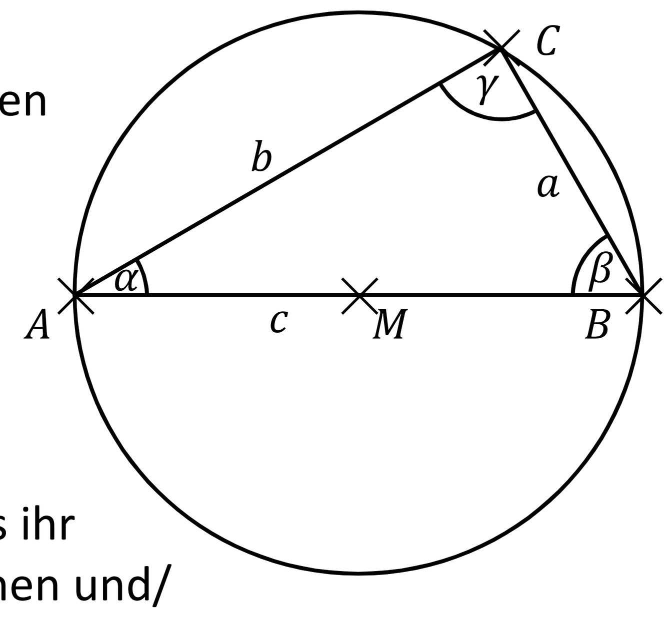
Die Doppelstunde wurde in einem Mathematik-Grundkurs der 11. Klasse eingebettet in die analytische Geometrie durchgeführt.
Zu Beginn des Unterrichts wurden kurz grundlegende Eigenschaften eines mathematischen Beweises gesammelt und die Aussage des Satzes des Thales wiederholt. Anschließend wurde der Kurs in zwei Teile geteilt. Ein Teil sollte den Satz mithilfe des erst kürzlich im Unterricht eingeführten Skalarproduktes beweisen, der andere mit der Innenwinkelsumme, wofür 35 Minuten zur Verfügung standen. Anschließend sollten die Ergebnisse vorgestellt werden. Wenn die Lernenden beim Beweisen nicht weiter kamen, sollten sie sich selbstständig eines von drei durchnummerierten und teilweise aufeinander aufbauenden Hilfskärtchen nehmen, die verdeckt mehrfach auslagen. Der Unterricht endete mit dem Rechnen eines Zahlenbeispiels für die Skalarprodukt-Version.

Die Aufgabe für das Skalarprodukt



1. Zeichnet jeder ein Dreieck in euer Heft, das den Satz des Thales erfüllt, und beschriftet es wie in der Abbildung rechts.
2. Überlegt euch, wie man mit den euch aus dem Unterricht bekannten Möglichkeiten prüfen kann, ob zwei Vektoren die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind.
3. Sammelt anhand von Aufgabe 1 und 2 Ideen, wie ihr zum Beweisen vorgehen könntet. Falls ihr nicht weiter wisst, nehmt euch ein Hilfskärtchen und/oder meldet euch.
4. Überlegt euch, wie ihr euer Ergebnis der Klasse präsentieren könnt. Jedes Mitglied eurer Gruppe soll in der Lage sein, euer Vorgehen vorzustellen.

Die Aufgabe für die Innenwinkelsumme



1. Zeichnet jeder ein Dreieck in euer Heft, das den Satz des Thales erfüllt, und beschriftet es wie in der Abbildung rechts.
2. Was wisst ihr über die Innenwinkel eines Dreiecks? Was über die eines rechtwinkligen Dreiecks?
3. Sammelt anhand von Aufgabe 1 und 2 Ideen, wie ihr zum Beweisen vorgehen könntet. Falls ihr nicht weiter wisst, nehmt euch ein Hilfskärtchen und/oder meldet euch.
4. Überlegt euch, wie ihr euer Ergebnis der Klasse präsentieren könnt. Jedes Mitglied eurer Gruppe soll in der Lage sein, euer Vorgehen vorzustellen.

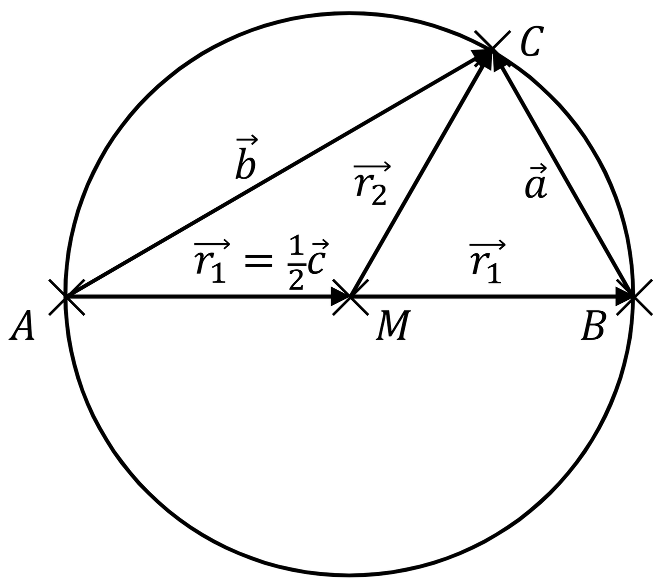
Die Hilfskärtchen für das Skalarprodukt

1. In eurer Zeichnung gibt es neben den Seiten eures Dreiecks noch drei weitere Strecken, wovon zwei den gleichen Vektor haben. Welche sind es? Was könnt ihr über sie sagen?
2. Nutzt die Vektoren dieser drei Strecken, um $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf eine andere Art und Weise zu schreiben und verwendet euer Ergebnis aus Aufgabe 2.
3. Die dritte binomische Formel gilt auch für Vektoraddition und Skalarprodukt.

Die Hilfskärtchen für die Innenwinkelsumme

1. In eurer Zeichnung gibt es neben den Seiten eures Dreiecks noch drei weitere Strecken. Welche sind es? Was könnt ihr über sie sagen?
2. Was erhaltet ihr, wenn ihr die Strecken aus Tipp 1 in eure Zeichnung einzeichnet?
3. Die Dreiecke aus Tipp 2 sind beide gleichschenklig. Was heißt das für die Winkel dieser und eures ursprünglichen Dreiecks?

Die Lösung für das Skalarprodukt



Nach Aufgabe 2 ist zu zeigen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Wenn man M und C verbindet, erkennt man, dass man $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auch schreiben kann als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{r_2} + \vec{r_1})$$

Mittels dritter binomischer Formel folgt:

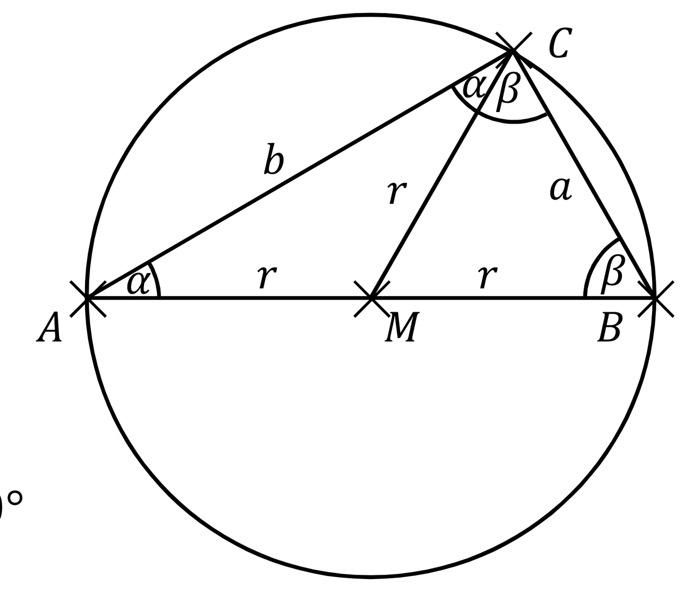
$$(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{r_2} + \vec{r_1}) = \vec{r_2}^2 - \vec{r_1}^2$$

Für den Radius r des Kreises ergibt sich so:

$$\vec{r_2}^2 - \vec{r_1}^2 = r^2 - r^2 = 0$$

Also schneiden sich $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im rechten Winkel.

Die Lösung für die Innenwinkelsumme



Nach Aufgabe 2 ist bekannt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Durch Verbinden von M und C erhält man zwei gleichschenklige Dreiecke. In solchen sind die Basiswinkel gleich, also gilt:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Durch Einsetzen in die Formel oben ergibt sich:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180°$$

Teilt man nun durch 2, erhält man:

$$\alpha + \beta = 90° = \gamma$$

Damit ist γ stets ein rechter Winkel.

Die antizipierten Lösungen

Aufgrund des vorgegebenen Kern-Hilfsmittels (Skalarprodukt bzw. Innenwinkelsumme) waren keine größeren Abweichungen von den obigen Lösungen zu erwarten. Ich erwartete jedoch, dass die Skalarprodukt-Version schwerer sein wird als die Version mit der Innenwinkelsumme und nur mittels Hilfskärtchen gelöst werden kann.

Die tatsächlichen Lösungen

Innerhalb der beiden Klassenteile bildeten sich je drei Untergruppen. Eine der Innenwinkel-Untergruppen hatte den Beweis selbstständig ausgeführt, die anderen beiden hatten sich ein paar Kärtchen genommen. Bei der Skalarprodukt-Gruppe arbeitete eine Untergruppe mithilfe der Hilfskärtchen recht selbstständig, eine weitere (darunter die bei der Wiederholung zu Beginn engagierteste Schülerin) bekam nur gegen Ende der Arbeitsphase von mir Tipp 3 mündlich gesagt und eine dritte Gruppe bestand aus vier sehr schwachen Schülerinnen mit großen Problemen und viel Hilfsbedarf, da ihnen das Skalarprodukt nicht geläufig zu sein schien.

Die Reflexion des Moduls

Ich selber habe bei Beweisen in der Oberstufe immer abgeschaltet und nicht zugehört. Daher war es für mich nicht nur etwas Neues, selbst eine Unterrichtsstunde zum Thema Beweis durchzuführen, in der dieser zudem den Kern bildete, sondern ebenfalls – auch in vorherigen Besuchen bei dem Kurs – Beweisverfahren in der Schule mitzuerleben. Der dort von der Lehrkraft durchgeführte Beweis war sogar eben der, dass das Skalarprodukt bei rechtwinkligen Vektoren 0 ist. Sowohl dieser Beweis als auch die meiner Lehrerin in der Oberstufe waren jedoch als stark gelenkter Frontalunterricht ausgeführt. Dadurch, dass vor allem der Beweisteil des Unterrichts meiner Meinung nach relativ gut und wie erwartet gelaufen ist, kann ich mir durchaus vorstellen, in meiner späteren Lehrertätigkeit Beweise schülerfokussiert zu unterrichten.

Die Quellen

Die Skalarprodukt-Version basiert auf dem Schulbuch „EdM“ des Kurses, die Innenwinkel-Version auf dem Artikel „Satz des Thales“ auf Wikipedia.de (27. März 2014).

Janni Kettenburg | Forschungs- und Entwicklungspraktikum Mathematik (Köhne/Klostermann) WS13 | Datum: 13. Mai 2014